Cours — CALCULS MATRICIELS

1 Définitions et opérations sur les matrices

Définitions et généralités

Analogie avec les systèmes linéaires

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 & L_1 \\ 7x_1 + 3x_3 = 5 & L_2 \\ 2x_2 + x_3 = 14 & L_3 \end{cases} \tag{1}$$

En récupérant chaque coefficient par ligne, on obtient :

- $3, 2, 1$
- $7, 0, 3$
- $0, 2, 1$

On peut alors regrouper ces coefficients dans un tableau que l'on appellera **matrice**.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice

Soient $l, c \in \mathbb{N}^*$.
On appelle **matrice** de **taille** $l \times c$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau de l lignes et c colonnes de la forme :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1c} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lc} \end{pmatrix}$$

- a_{lp} est appelé « coefficient de $\mathcal{A}$ » à la ligne l et la colonne c.
- Tous les a_{lp} sont appelés coefficients de la matrice $\mathcal{A}$.

Les matrices de taille $l \times c$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ sont notées $\mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{K})$, notée également $\mathcal{M} = (m_{ij})_{\substack{1\le i\le l \\ 1\le j\le c}}$

Remarque

Généralement on notera une matrice avec une lettre majuscule et les coefficients de cette dernière seront notés avec la même lettre minuscule.
Pour mieux comprendre vous pouvez retenir $\mathcal{M}_{ligne,colonne}$

Exemple

$A \in \mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{K}) = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le l \\ 1\le j\le c}}$ avec $\forall (i,j) \in (\llbracket 1, l\rrbracket, \llbracket 1, c\rrbracket)$.

Remarque

Soit les matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ notées $\mathcal{M}_{lc}(\mathbb{K})$

- ➢ L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{l,1}(\mathbb{K})$ avec $c = 1$ donc n'**ayant qu'une colonne** sont appelées **matrice colonnes**, elles représentent en fait un vecteur de $\mathbb{K}^n$. Ainsi, on notera les coefficients a_i au lieu de a_{i1} avec $i \in [\![1; l]\!]$.
- ➢ L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{1,c}(\mathbb{K})$ avec $l = 1$ donc n'ayant qu'une ligne sont appelées **matrice lignes**, elles représentent quant à elles un vecteur de $\mathbb{K}^n$ écrit en ligne et sans virgule entre les composantes. Ainsi, on notera les coefficients a_i au lieu de a_{1i} avec $i \in [\![1; c]\!]$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

à gauche une matrice ligne, à droite une matrice colonne.

Matrices particulières

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{K})$

Matrice carrée

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 & 20 \\ 4 & 5 & 6 & 30 & 40 \\ 7 & 8 & 9 & 50 & 60 \\ 10 & 11 & 12 & 70 & 80 \\ 13 & 14 & 15 & 90 & 100 \end{pmatrix}$$

Dans notre cas, $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{5,5}(\mathbb{R})$.
Ainsi $l = c = 5$.
On appelle **matrice carrée d'ordre n** lorsqu'elle possède le même nombre de lignes et de colonnes.
On note plus simplement $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ou encore $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.
Dans notre exemple on notera $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$

Matrice rectangulaire

Dans notre cas, $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{K})$.
Ainsi toutes matrices telle que $l \neq c$, autrement dit, qui n'a pas le même nombre de colonnes que de lignes sont appelées **matrices rectangulaires**.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1c} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lc} \end{pmatrix}$$

Matrice nulle

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Dans notre cas, $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{K})$.
On remarque que $\forall i \in [\![1; l]\!]$ et $\forall j \in [\![1; c]\!]$, tous les coefficients $a_{ij} = 0$ sont nuls. On l'appelle ainsi **matrice nulle**.
Elle est notée $0_{l,c}(\mathbb{K})$ ou plus simplement 0.

$$\forall i \in [\![1; l]\!], \forall j \in [\![1; c]\!], \qquad a_{ij} = 0$$

Propriété

Égalité de deux matrices

Soient $\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq l_1 \\ 1 \leq j \leq c_1}} \in \mathcal{M}_{l_1,c_1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq l_2 \\ 1 \leq j \leq c_2}} \in \mathcal{M}_{l_2,c_2}(\mathbb{K})$, avec $(l_1, c_1, l_2, c_2) \in (\mathbb{N}^*)^4$.

On dit que deux matrices sont **égales** lorsque :

- ➢ Le nombre de lignes de $\mathcal{A}$ est égal au nombre de lignes de $\mathcal{B} \Rightarrow l_1 = l_2$.
- ➢ Le nombre de colonnes de $\mathcal{A}$ est égal au nombre de colonnes de $\mathcal{B} \Rightarrow c_1 = c_2$.
- ➢ Les coefficients des deux matrices sont égaux un à un.

$$\forall i \in [\![1; l]\!], \forall j \in [\![1; c]\!], \qquad a_{ij} = b_{ij}$$

Ainsi, on note $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Opérations simples sur les matrices

L'addition de deux matrices

Opération d'addition

Soient $\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq l\\1\leq j\leq c}} \in \mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{B} = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq l\\1\leq j\leq c}} \in \mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{K})$, avec $(l,c) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
Pour additionner deux matrices, il suffit de faire la somme des coefficients un à un.
La **somme de deux matrices** est donnée par :

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq l\\1\leq j\leq c}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1c}+b_{1c} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{2c}+b_{2c} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1}+b_{l1} & \dots & a_{lc}+b_{lc} \end{pmatrix}$$

Conditions pour additionner deux matrices
Il faut que les matrices A et B soient exactement de la même taille pour pouvoir additionner ces dernières entre elles.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 & 3+0 \\ 4+(-1) & 5+3 & 6+2 \\ 7+4 & 8+(-2) & 9+1 \\ 10+0 & 11+0 & 12+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 8 \\ 11 & 6 & 10 \\ 10 & 11 & 17 \end{pmatrix}$$

Le produit par un scalaire

Produit par un scalaire

Soit $\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq l\\1\leq j\leq c}} \in \mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Le produit de $\mathcal{A}$ par λ est donné par :

$$\lambda\mathcal{A} = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq l\\1\leq j\leq c}}$$

Le résultat du produit d'une matrice par un scalaire doit être une matrice de même taille que $\mathcal{A}$.

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1c} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2c} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{l1} & \lambda a_{l2} & \dots & \lambda a_{lc} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$3 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 1 & 3\times 2 & 3\times 3 \\ 3\times 4 & 3\times 5 & 3\times 6 \\ 3\times 7 & 3\times 8 & 3\times 9 \\ 3\times 10 & 3\times 11 & 3\times 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \\ 30 & 33 & 36 \end{pmatrix}$$

Propriété

Addition de matrices

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{lc}(\mathbb{K})$.

1. **Commutativité** $A + B = B + A$
2. **Associativité** $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. **Élément neutre** $0 + A = A$
4. **Élément absorbant** $A + (-A) = 0$

Propriété

Produit par un scalaire

Soient $A \in \mathcal{M}_{lc}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

1. **Commutativité** $\lambda A = A\lambda$
2. **Associativité** $\lambda(A\mu) = (\lambda A)\mu$
3. **Élément neutre** $1A = A$

Propriété

Distributivité addition / produit par un scalaire

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{lc}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \qquad A(\lambda + \mu) = A\lambda + A\mu$$

Remarque

- 0 représente la matrice nulle.
- Les opérations définies sur $\mathcal{M}_{lc}(\mathbb{K})$ font de lui un espace vectoriel.

Produit de deux matrices

Produit matriciel

Soient $\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq l_1 \\ 1 \leq j \leq c_1}} \in \mathcal{M}_{l_1,c_1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq l_2 \\ 1 \leq j \leq c_2}} \in \mathcal{M}_{l_2,c_2}(\mathbb{K})$, avec $(l_1, c_1, l_2, c_2) \in (\mathbb{N}^*)^4$.

On appelle **produit de matrices** de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$ la matrice $\mathcal{C} = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq l_1 \\ 1 \leq j \leq c_2}} \in \mathcal{M}_{l_1,c_2}$.

Les coefficients de la matrice résultante $\mathcal{C}$ sont donnés par $\forall i \in [\![1; l_1]\!]$, $\forall j \in [\![1; c_2]\!]$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{il_1}b_{c_2j} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Ainsi on note $\mathcal{C} = \mathcal{AB}$.

Remarque

Pour pouvoir effectuer le produit de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$, il faut que le nombre de colonnes c_1 de $\mathcal{A}$ soit égal au nombre de lignes l_2 de $\mathcal{B}$.
Autrement dit, $c_1 = l_2$**.** Vous pouvez garder en tête l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{l_1,c_1}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{l_2,c_2}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{l_1,c_2} \\ \mathcal{A} \qquad\qquad \mathcal{B} & \longmapsto & \mathcal{AB} \end{array}$$

Le produit $\mathcal{AB}$ peut exister sans que $\mathcal{BA}$ existe.

- Le produit **n'est pas forcément commutatif**, la plupart des cas, on aura $\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}$
- Si $\mathcal{AB} = 0$, cela n'implique pas forcément que l'une des matrice soit nulle.
- Si $\mathcal{AB} = \mathcal{AC}$, cela n'implique pas forcément que $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

Exemple

Soient les matrices A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit $C = A \times B$ est défini par :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{3} A_{ik} B_{kj}$$

Calculons chaque élément de C :

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
C_{11} &= 1 \times 9 + 2 \times 6 + 3 \times 3 = 9 + 12 + 9 = 30 \\
C_{12} &= 1 \times 8 + 2 \times 5 + 3 \times 2 = 8 + 10 + 6 = 24 \\
C_{13} &= 1 \times 7 + 2 \times 4 + 3 \times 1 = 7 + 8 + 3 = 18 \\
C_{21} &= 4 \times 9 + 5 \times 6 + 6 \times 3 = 36 + 30 + 18 = 84 \\
C_{22} &= 4 \times 8 + 5 \times 5 + 6 \times 2 = 32 + 25 + 12 = 69 \\
C_{23} &= 4 \times 7 + 5 \times 4 + 6 \times 1 = 28 + 20 + 6 = 54 \\
C_{31} &= 7 \times 9 + 8 \times 6 + 9 \times 3 = 63 + 48 + 27 = 138 \\
C_{32} &= 7 \times 8 + 8 \times 5 + 9 \times 2 = 56 + 40 + 18 = 114 \\
C_{33} &= 7 \times 7 + 8 \times 4 + 9 \times 1 = 49 + 32 + 9 = 90
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$C = \begin{pmatrix} 30 & 24 & 18 \\ 84 & 69 & 54 \\ 138 & 114 & 90 \end{pmatrix}$$

Remarque

La méthode sera expliquée en détail en présentiel.

Propriété

Produit matriciel

Soient $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$ et $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})^3$, $\mathcal{C} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, avec $(q, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

1. **Commutatif**, $\mathcal{C}(\mathcal{A}\mathcal{B}) = (\mathcal{C}\mathcal{A})\mathcal{B}$
2. **Distributivité**

   $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)\mathcal{B} = \mathcal{A}_1\mathcal{B} + \mathcal{A}_2\mathcal{B}$ $\qquad$ $(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2)\mathcal{A} = \mathcal{B}_1\mathcal{A} + \mathcal{B}_2\mathcal{A}$
3. **Produit et multiplication par un scalaire distributifs** $(\lambda\mathcal{A})\mathcal{B} = \mathcal{A}(\lambda\mathcal{B}) = \lambda(\mathcal{A}\mathcal{B})$

2 Matrices particulières et inverse d'une matrice carrée

Matrices particulières

Diagonale, Identité

Soit $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Puisque $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\mathcal{A}$ est une matrice carrée.

➢ Les **coefficients diagonales** de la matrice $\mathcal{A}$ sont les coefficients notés $a_{ii}, \forall i \in [\![1;n]\!]$.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{lc} \end{pmatrix}$$

Dans notre cas, $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{K})$.
On remarque ici que tous les coefficients de la matrices sont nuls. On note $\forall i \neq j$, $a_{ij} = 0$ avec $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$.
On l'appelle alors **matrice diagonale**.
Ce n'est pas parce que un des coefficients de la matrice est nulle qu'elle n'est pas diagonale.

Dans notre cas, $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{K})$.
On remarque ici que tous les coefficients de la matrices sont nuls. On note $\forall i \neq j$, $a_{ij} = 0$ avec $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$.
On l'appelle alors **matrice identité**, plus souvent notée I_n. Lorsque les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 et tous les autres à 0.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices diagonales et identités n'ont de sens uniquement en présence de matrices carrées.

Remarque

Soit i, j deux entiers, on définit le **symbole de Kronecker** par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $I_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice identité.

Propriété

IDENTITÉ

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

1. **Neutre** $AI_n = A$ et $I_nA = A$
2. Si $AB = BA$ alors $A = I_n$

Puissance d'une matrice

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la **puissance d'une matrice** par :

$$\mathcal{A}^0 = I_n \qquad \mathcal{A}^p = \mathcal{A}\mathcal{A}^{p-1}, \forall p \in \mathbb{N}^*$$

Vous savez déjà que $\mathcal{A}^p = \underbrace{\mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{A}\dots\mathcal{A}}_{p \text{ fois}}$

Matrice transposée, matrice adjointe

Matrice transposée

Soit $\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq c}} \in \mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{K})$.

On appelle **matrice transposée** la matrice de $\mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{K})$ notée $\mathcal{A}^t$ telle que $\forall i \in [\![1;l]\!]$ et $\forall j \in [\![1;c]\!]$,

$$(\mathbf{a}^t)_{ij} = a_{ji}$$

Matrice adjointe

Soit $\mathcal{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq c}} \in \mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{K})$.

On appelle **matrice adjointe** la matrice de $\mathcal{M}_{l,c}(\mathbb{K})$ notée $\mathcal{A}^*$ telle que $\forall i \in [\![1;l]\!]$ et $\forall j \in [\![1;c]\!]$,

$$(\mathbf{a}^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^t$.
La taille de $\mathcal{A}^t$ et de $\mathcal{A}^*$ est la même que celle de $\mathcal{A}$ si $l = c$, sinon de taille $c \times l$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & -i & 3 \\ 4i & 5-i & 2+3i \\ -2 & i & 1-i \end{pmatrix}$$

Matrice transposée

$$A^t = \begin{pmatrix} 1+2i & 4i & -2 \\ -i & 5-i & i \\ 3 & 2+3i & 1-i \end{pmatrix}$$

Matrice adjointe

$$A^* = \begin{pmatrix} 1-2i & -4i & -2 \\ i & 5+i & -i \\ 3 & 2-3i & 1+i \end{pmatrix}$$

Propriété

Transposée et adjointe

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{lc}(\mathbb{K})$ avec $l, c \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$

1 $(A^*)^* = A$

2 $(A^t)^t = A$

3 $(AB)^* = A^*B^*$

4 $(AB)^t = A^tB^t$

Inverse d'une matrice carrée

La notion d'inverse d'une matrice n'est valable **que sur des matrices carrées.**
Toutes les matrices carrées **n'admettent pas forcément d'inverse**.

Remarque

Soit $a \in \mathbb{K}^*$, alors il existe un **inverse** noté $\frac{1}{a}$, que l'on peut aussi noter a^{-1} qui vérifie :

$$aa^{-1} = a^{-1} = 1$$

Le nombre $1 \in \mathbb{K}$ est appelé élément neutre pour la multiplication. Lorsque l'on parle de multiplication de matrices, l'élément neutre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice identité I_n.
Autrement dit, en terme matriciel l'équivalent de 1 pour la multiplication est I_n.

Matrice inversible, matrice inverse

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La matrice $\mathcal{A}$ est dite **inversible** si $\exists \mathcal{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = I_n$$

Si $\mathcal{B}$ existe alors il est unique. Et on l'appelle inverse de $\mathcal{A}$. On note $\mathcal{A}^{-1}$.
L'ensemble des matrices inversibles est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et appelé **groupe linéaire** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
La notion d'inverse d'une matrice n'a pas de sens si on ne parle pas de matrice carrée.

Polynômes appliquées aux matrices

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme donné par :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$$

où $\forall k \in [\![0;p]\!]$, $a_k \in \mathbb{K}$
(cette définition a été vue lors du chapitre précédent...)
$\forall \mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le polynôme $P(\mathcal{A})$ est définie par :

$$P(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{p} a_k \mathcal{A}^k = a_0 I_n + a_1 \mathcal{A} + a_2 \mathcal{A}^2 + \ldots + a_p \mathcal{A}^p$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
On cherche à évaluer le polynôme : $P(X) = X^2 - 2X + 3I$ en A.

» Calculs par étapes

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ $\qquad - 2A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ $\qquad 3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

» Calcul final

$$\begin{aligned} P(A) &= A^2 - 2A + 3I \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

» Résultat final :

$$P(A) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Remarque

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Pour montrer que A est inversible, il suffit de montrer que $AB = I_n$ ou que $BA = I_n$.

3 Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant

Déterminant d'une matrice

Déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

Soit $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

On appelle **déterminant** de la matrice $\mathcal{A}$, l'élément de $\mathbb{K}$ noté $det(\mathcal{A})$ et définit par :

$$det(\mathcal{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $\mathcal{A} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 3$.
On appelle **déterminant** de la matrice $\mathcal{A}$, noté $det(\mathcal{A})$ où

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

L'élément de $\mathbb{K}$ définit par :

- à $i_0 \in [\![1;n]\!]$ fixé, on a $det(\mathcal{A}) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} det(\mathcal{A}_{i_0 j})$ (1)
- à $j_0 \in [\![1;n]\!]$ fixé, on a $det(\mathcal{A}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} a_{i j_0} det(\mathcal{A}_{i j_0})$ (2)

où $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $\mathcal{A}_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice carrée déduite de $\mathcal{A}$ en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne.

Remarque

Les deux formules précédantes sont équivalentes selon le développement de votre déterminant, en ligne ou en colonne.

Propriété

DÉTERMINANT

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Si une ligne (resp. colonne) est remplie de 0 alors $det(\mathcal{A}) = 0$
2. Si deux lignes (resp. colonnes) sont égales alors $det(\mathcal{A}) = 0$
3. $det(\mathcal{A}^t) = det(\mathcal{A})$
4. $det(\mathcal{A}^*) = \overline{det(\mathcal{A})}$

Opérations élémentaires

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- Si **on échange deux lignes** (resp. colonnes) le déterminant de la matrice obtenue sera égal à $-det(\mathcal{A})$
- Si **on multiplie par un réel** λ une ligne (resp. une colonne), le déterminant de la matrice obtenue sera égal à $\lambda det(\mathcal{A})$.
- Si **on ajoute une combinaison linéaire** d'une ligne (resp. colonne) entre elles, la valeur du déterminant reste inchangée.

Méthode

Calculer le déterminant d'une matrice

1. Choisir une ligne/colonne qui a le plus de 0.
2. Si possible, utiliser les opérations élémentaires ci dessus pour augmenter le nombre de 0.
3. Développer le déterminant et conclure.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

» Objectif

Calculer $\det(A)$ par développement selon la première ligne.

» Calculs par étapes

On utilise la formule :

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Application directe :

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (4 \cdot 0 - 1 \cdot 5) + 1 \cdot (0 \cdot 0 - 1 \cdot (-2)) + 3 \cdot (0 \cdot 5 - 4 \cdot (-2)) \\ &= 2 \cdot (-5) + 2 + 3 \cdot 8 \\ &= -10 + 2 + 24 \\ &= 16 \end{aligned}$$

» Résultat final :

$$\det(A) = 16$$

Propriété

DÉTERMINANT D'UNE MATRICE

Soient $(\mathcal{A},\mathcal{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, alors :

1 $det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = det(\mathcal{A})det(\mathcal{B})$

2 $det(I_n) = 1$

3 $\mathcal{A}$ est **inversible** si $det(\mathcal{A}) \neq 0$

4 Si $\mathcal{A}$ inversible : $det(\mathcal{A}^{-1}) = \dfrac{1}{det(\mathcal{A})}$

Calculer l'inverse d'une matrice

Matrice de cofacteurs – comatrice

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$.
On appelle **comatrice** de $\mathcal{A}$, l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ noté $com(\mathcal{A})$ de coefficients :

$$(com(\mathcal{A}))_{ij} = (-1)^{i+j} det(\mathcal{A}_{ij})$$

où, $\forall i,j \in [\![1;n]\!]$, $\mathcal{A}_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice carrée déduite de $\mathcal{A}$ en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

» Objectif
Calculer la **comatrice** de A, notée Com(A), c'est-à-dire la matrice des cofacteurs de A.

» Calculs par cofacteurs
Chaque cofacteur C_{ij} est défini par $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, où M_{ij} est le mineur associé.

$$C_{11} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 1 \cdot 5 = -5$$

$$C_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0 \cdot 0 - 1 \cdot (-2)) = -2$$

$$C_{13} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot 5 - 4 \cdot (-2) = 8$$

$$C_{21} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -(-1 \cdot 0 - 3 \cdot 5) = -(-15) = 15$$

$$\dots$$

» Comatrice de A

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 8 \\ 15 & 6 & -8 \\ -13 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Formule de l'inverse d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $det(A) \neq 0$

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{det(\mathcal{A})}(com(\mathcal{A}))^t$$

Méthode

Calculer l'inverse d'une matrice

1. Calculer le déterminant de la matrice A.
2. Vérifier que $det(A) \neq 0$.
3. Calculer la comatrice $com(A)$, sans oublier de changer les signes des coefficients $1/2$.
4. Calculer

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{det(\mathcal{A})}(com(\mathcal{A}))^t$$

5. Conclure.